ОГБОУ СПО «Рославльский медицинский техникум»

Рассмотрено на заседании ЦМК
Протокол № _____ от ______
Председатель ЦМК _________

Утверждаю
Зам. директора по УР
Н.В. Некрашевич___________

Методическая разработка

Тема: «Олимпиада по математике

для студентов I курса СПО»

Специальность: 33.02.01. «Фармация»
Дисциплина «Математика»

Рекомендовано
методическим советом
ОГБОУ СПО «РМТ»
Протокол № __от _________
Председатель__________ А.В. Бондарева

Составила преподаватель
высшей квалификационной
категории
Л.А. Иванова________

Рославль, 2015

ОГБОУ СПО «Рославльский медицинский техникум»

Рассмотрено на заседании ЦМК
Протокол № ____ от _____
Председатель ЦМК _______

Утверждаю
Зам. директора по УР
Н.В. Некрашевич_________

Методическая разработка

Тема: «Олимпиада по математике

для студентов I курса СПО»

Специальность: 33.02.01. «Фармация»
Дисциплина «Математика»

Рекомендовано
методическим советом
ОГБОУ СПО «РМТ»
Протокол № __от ________
Председатель_________ А.В. Бондарева

Составила преподаватель
высшей квалификационной
категории
Л.А. Иванова________

Рославль, 2015

Содержание

Введение

Для повышения интереса у студентов СПО к изучению математики используются разные средства. Одним из них является проведение олимпиады внутри учебного заведения.

Цели и задачи такой олимпиады:

- Контроль качества знаний у студентов по данной учебной дисциплине;
- Развитие умения решать более сложные задачи, чем на занятиях по математике;
- Развитие умения отыскать нестандартный подход к решению той или иной задачи;
- Индивидуальный подход к каждому студенту;
- Развитие творческих способностей студентов.

В данной методической разработке представлена олимпиада по математике для студентов I курса СПО. Она состоит из пяти задач, охватывающих различные разделы математики, изучаемых на I курсе:

- Решение показательных уравнений
- Решение логарифмических уравнений
- Вычисление значения производной функции в точке
- Применение производной функции при решении текстовых задач
- Вычисление площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла

Задачи имеют различный уровень сложности, что позволяет участвовать в олимпиаде даже тем ребятам, у которых средний уровень подготовки.

Результаты олимпиады оцениваются в баллах. Причем оценивается не только задача в целом, но и каждый этап ее решения. Максимальное количество баллов по каждой задаче представлено в таблице в конце разработки.

Время, отводимое на решение олимпиадных задач – 1.5–2 астрономических часа.

Задания к олимпиаде:

1) Решить показательное уравнение:

$$9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81$$

2) Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_{2,25}(2x + 0.25) - \log_{1,5} 7 = 1$$

3) Найти производную функции $f(x) = \ln \sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ в точке $x = 2$.

4) Прямая касается параболы $y = -x^2 + 2x + 2$ в точке А, пересекает Ox в точке В, ось Oy в точке С. Известно, что точка А лежит в I четверти координатной плоскости, и отрезок АС в 2 раза длиннее отрезка АВ. Составить уравнение касательной.

5) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 4(1 - x^3)$ и осями координат.

Решение задач и их разбалловка.

Задание № 1.

Решить показательное уравнение:

$$9^x = 8 \cdot 3^{x+1} + 81$$

<u>Решение и разбалловка.</u>

Заменим 9^x и 3^{x+1} на 3^{2x} и $3 \cdot 3^x$, используя свойства степеней:

$3^{2x} = 8 \cdot 3 \cdot 3^x + 81$ (0,5 балла)

$3^{2x} - 24 \cdot 3^x - 81 = 0$ (0,5 балла)

Применим подстановку $t = 3^x$, чтобы заменить данное уравнение на квадратное:

$t^2 - 24t - 81 = 0$

(0,5 балла)

$D_1 = 12^2 + 81 = 225$

$t = 12 \pm 15$

$t_1 = 27$; $t_2 = -3$

(0,5 балла)

Заменим t на 3^x. Получим совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3^x = 27 \\ 3^x = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3$$

(0,5 балла)

Так как $-3 < 0$, то второе уравнение решений не имеет.

Ответ: $x = 3$

(0,5 балла)

Итого за 1 задание 3 балла.

Задание № 2.

Решить логарифмическое уравнение:

$$\log_{2,25}(2x+0.25)-\log_{1,5}7=1$$

<u>Решение и разбалловка</u>

Для решения данного уравнения надо логарифмы привести к общему основанию 1,5. Для этого воспользуемся формулой

$$\log_{a^k} b=\frac{1}{k}\cdot\log_a b$$

$$\log_{2,25}(2x+0.25)=\log_{1,5^2}(2x+0,25)=\frac{1}{2}\log_{1,5}(2x+0,25)$$

В результате получим уравнение:

$$\frac{1}{2}\cdot\log_{1,5}(2x+0,25)-\log_{1,5}7=1$$

(2 балла)

Применим свойства логарифма.

$$\log_{1,5}\sqrt{2x+0,25}-\log_{1,5}7=1$$

(0,5 балла)

$$\log_{1,5}\frac{\sqrt{2x+0,25}}{7}=1$$

(0,5 балла)

$$\sqrt{2x+0,25}=10,5$$

Получили иррациональное уравнение. Возведём обе части в квадрат:

$$\left(\sqrt{2x+0,25}\right)^2=10,5^2$$

$$2x+0,25=110,25$$

$$2x=110$$

$$x=55$$

(1 балл)

Логарифмические уравнение требует нахождения ОДЗ или выполнения проверки.

I. ОДЗ

$$2x+0,25>0$$

$$x=55$$

$$2\cdot55+0,25>0-\textit{верно}$$

(1,5 балла)

II. Проверка

$$\log_{2,25}(2\cdot55+0,25)-\log_{1,5}7=1,$$

$$\log_{2,25}110,25-\log_{1,5}7=1,$$

$\log_{1,5}\sqrt{110,25}-\log_{1,5}7=1$,

$\log_{1,5}10,5-\log_{1,5}7=1,$

$\log_{1,5}\frac{10,5}{7}=1,$

$\log_{1,5}1,5=1-\textit{верно}$

(1 балл)

Ответ: $x=55$

(0,5 балла)

Итого за 2 задание 5,5 или 6 баллов.

Задание № 3

Найти производную функции $f(x)=\ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$ в точке $x=2$.

Решение и разбалловка.

Упростим функцию, используя свойства логарифма

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(\ln\left(x^2+1\right)-\ln\left(x^2-1\right)\right)$$

(1 балл)

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\left(\ln\left(x^2+1\right)\right)'-\left(\ln\left(x^2-1\right)\right)'\right)$$

Воспользуемся формулой производной сложной функции

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}-\frac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}\right)$$

(0,5 балла)

$$f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right),$$

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2-1}\right),$$

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\frac{\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)},$$

$$f'(x)=\frac{2x}{3}\cdot\frac{-2}{x^4-1},$$

$$f'(x)=-\frac{4x}{3\left(x^4-1\right)}.$$

(1 балл)

$$f'(2)=-\frac{4\cdot 2}{3\left(2^4-1\right)}=-\frac{8}{45}$$

(0,5 балла)

Итого за 3 задание 3 балла.

Задание № 4.

Прямая касается параболы $y=-x^2+2x+2$ в точке А, пересекает *Ox в* точке В, ось *Oy* в точке С. Известно, что точка А лежит в I четверти координатной плоскости, и отрезок АС в 2 раза длиннее отрезка АВ. Составить уравнение касательной.

<u>Решение и разбалловка.</u>

Построим график функции $y=-x^2+2x+2$. Графиком является парабола, ветви которой направлены вниз. Найдём её вершину, используя производную

$$y'=\left(-x^2+2x+2\right)'=-2x+2$$

$$y'=0 \Rightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$$

Подставим $x=1$ в функцию

$$y=-1^2+2\cdot 1+2$$

$$y=3$$

(1;3) - координаты вершины

(1 балл)

Найдём точки пересечения параболы с осью *Ox*.

$$-x^2+2x+2=0,$$

$$x^2-2x-2=0,$$

$$D=4+8=12,$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2},$$

$$x_1=1+\sqrt{3}\approx 2{,}7,$$

$$x_2=1-\sqrt{3}\approx -0{,}7.$$

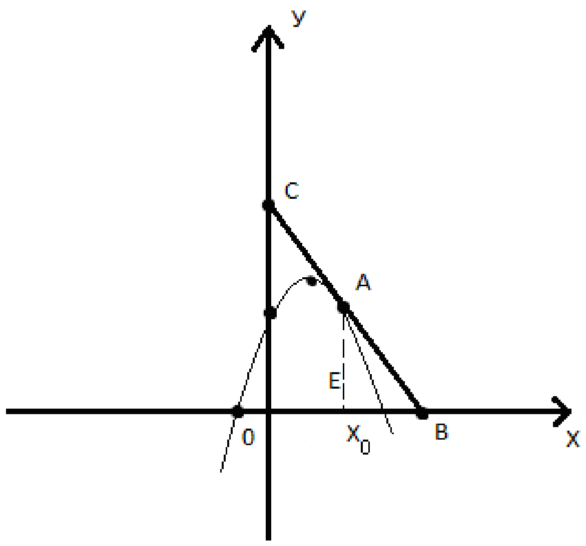
(0,5 балла)

Найдём точку пересечения с осью *Oy*.

$$f(0)=2$$

(0,5 балла)

Строим график.



(1 балл)

Касательная - прямая. Уравнение прямой $y = kx + b$. Угловой коэффициент касательной

$k = f'(x_0) = -2x_0 + 2$. (Геометрический смысл производной)

(1,5 балла)

$b = OC$

(1 балл)

$C(0;b)$.

$A(x_0; kx_0 + b) = (x_0; -x_0^2 + 2x_0 + 2)$,

$kx_0 + b = (-2x_0 + 2)x_0 + b = -2x_0^2 + 2x_0 + b$

(1 балл)

С другой стороны, точка А лежит на параболе:

$y_A = -x_0^2 + 2x_0 + 2$

(0,5 балла)

Составим уравнение

$-x_0^2 + 2x_0 + 2 = -2x_0^2 + 2x_0 + b$

$x_0^2 + 2 = b$

(0,5 балла)

$A(x_0; -x_0^2 + 2x_0 + 2)$

$C(0; x_0^2 + 2)$

(0,5 балла)

По условию $AC = 2AB \Rightarrow CO = 3AE$

$x_0^2 + 2 = 3(-x_0^2 + 2x_0 + 2)$

(2 балла)

$x_0^2 + 2 = -3x_0^2 + 6x_0 + 6,$

$4x_0^2 - 6x_0 - 4 = 0,$

$2x_0^2 - 3x_0 - 2 = 0,$

$D = 9 + 16 = 25,$

$x_0 = \dfrac{3 \pm 5}{4},$

$\left[\begin{array}{l} x_0 = 2, \\ x_0 = -0{,}5 \end{array}\right.$

(0,5 балла)

Точка $A \in I$ четверти $\Rightarrow -0{,}5$ не удовлетворяет условию $\Rightarrow x_0 = 2$

(0,5 балла)

$k = -2 \cdot 2 + 2 = 2$

$b = 2^2 + 2 = 6$

(0,5 балла)

Ответ: уравнение касательной $y = -2x + 6$

(0,5 балла)

Итого за 4 задание 12 баллов.

Задание № 5.

Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 4(1 - x^3)$ и осями координат.

Дано:

$y = 4(1 - x^3)$,

$y = 0$,

$x = 0$

Найти:

$S_{фигуры}$

(0,5 балла)

Решение и разбалловка.

Построим график функции

$y = 4(1 - x^3)$

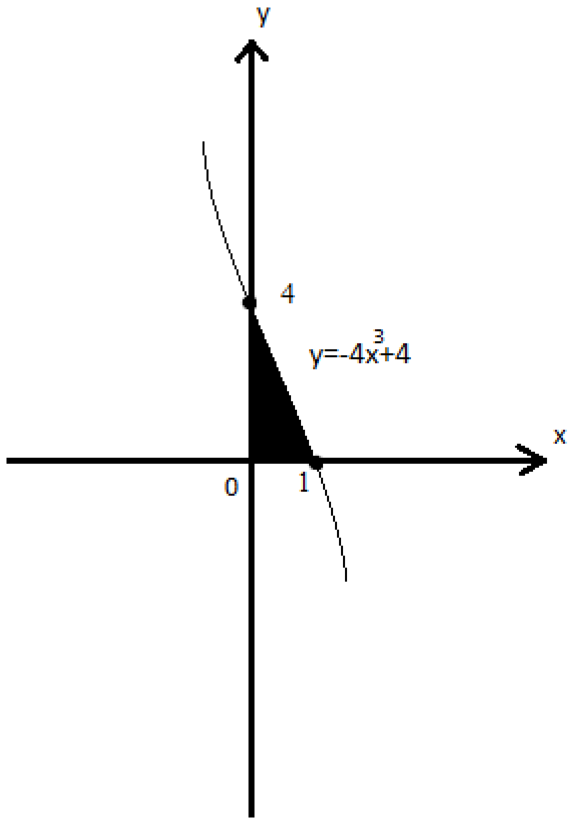
$y = 4 - 4x^3$

$y = -4x^3 + 4$

Для построения график функции $y = -4x^3$ нужно перенести на 4 единицы вверх по оси Oy

(1 балл)

x	-1	0	1
y	4	0	-4



(1 балл)

Полученная фигура - криволинейная трапеция. Пользуясь геометрическим смыслом определенного интеграла, получаем:

$$S_{фигуры} = \int_a^b f(x)dx$$

(0,5 балла)

$f(x) = -4x^3 + 4,$

$a = 0$

Найдем b:

$-4x^3 + 4 = 0,$

$4x^3 = 4,$

$x^3 = 1,$

$x = 1,$

$b = 1$

(0,5 балла)

$$S = \int_0^1 \left(-4x^3 + 4\right)dx = -4\int_0^1 x^3dx + 4\int_0^1 1dx = -4\frac{x^4}{4} + 4x\Big|_0^1 = -x^4 + 4x\Big|_0^1 = -1 + 4 = 3$$

(1 балл)

Ответ: $S_{фигуры} = 3ед^2$. $(3кв.ед)$
(0,5 балла)

Итого за 5 задание 5 баллов.

Итоги олимпиады сведём в таблицу:

Задание	Количество баллов
1	3
2	6
3	3
4	12
5	5
Итого	29

Задания для подготовки к олимпиаде

- Решить уравнения:

1) $27^x + 3^{x+4} = 82 \cdot 9^x$;
2) $3^{2x+1} + 4 \cdot 3^x - 2(3^x - 2) - 5 = 0$;
3) $3^{2x+1} - 3^{2x-1} + 3^{2x-2} = 225$;
4) $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$;
5) $\log_3 x - \log_9 x + \log_{81} x = \frac{3}{4}$; 6) $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

- Найти производные следующих функций:

1) $f(x) = 8\sin^2 x \cdot \cos x,\ (x = \frac{\pi}{4})$;

2) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}},\ (x = \sqrt{3})$;

3) $f(x) = \ln tg^2 x,\ (x = \frac{\pi}{4})$.

- Найти площадь фигур, ограниченных линиями:

1) $y = \sqrt{x}$;	2) $y = x^3$;	3) $y = x^2 + 1, x \in [0;1]$;
$y = 2$;	$y = \sqrt{x}$.	$y = -\frac{1}{9}x^2 + 1; x \in [0;3]$;
$x = 9$.		$y = -x + 3; x \in [1;3]$.

- Написать уравнение касательной к кривой

$$y = 4x - x^2$$

в точке пересечения с осью $0x$.

- Составить уравнение касательной к кривой

$$y = x^3 - 4x^2 + 8x + 6$$

в точке (2;14).

Заключение.

Изначально проведение предметных олимпиад имело целью развить интерес студентов к дисциплинам. В настоящее время роль предметных олимпиад возросла в связи с введением ЕГЭ и новыми правилами поступления в вузы. Олимпиады не только дают ценные материалы для суждения о степени подготовленности студентов к олимпиадам, но и выявляют наиболее одаренных и подготовленных молодых людей в той или иной предметной области, стимулируют углубленное изучение предмета.

В отличие от конкурсов, написания рефератов или исследовательских работ, олимпиады охватывают более широкий круг знаний по тому или иному курсу и способствуют формированию более широкой эрудиции, к чему так стремится любой преподаватель.

В предметных олимпиадах основой успеха является не сумма конкретных знаний студентов, а его способность логически мыслить, умение создать за короткий срок достаточно сложную и, главное, новую для него логическую конструкцию. Решая задачу выявления творческих способностей учащегося, т. е. умения «нестандартно мыслить», олимпиадные задания в значительной степени отошли от стандартных заданий.

Олимпиадная задача по любому предмету – это задача повышенной трудности, нестандартная как по формулировке, так и по методам решения. Для успешного выполнения заданий необходимо умение логически мыслить, анализировать условия нестандартных задач, разбивать задания на известные подзадачи. Основной трудностью участников является неумение пользоваться анализом для поиска решения, комбинирование известных способов решения.

Олимпиада – это внеклассная форма обучения. Чтобы подготовить студентов к участию в олимпиадах и проводить олимпиады, преподавателю необходимо вести кружки, факультативы, проводить большую подготовительную работу, подбирать и выполнять различные задачи и задания олимпиадного типа, детально знакомиться с различными вопросами, с новинками литературы. Для подготовки студентов к олимпиадам следует иметь индивидуальный подход к каждому студенту и основной упор делать на самостоятельную работу обучающегося.

Список литературы.

Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2000.

Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2000.

Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 10 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Алгебра и начала математического анализа (базовый уровень). 11 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Математика (базовый уровень). 10—11 кл. – М., 2005.

Башмаков М.И. Математика: 10 кл. Сборник задач: учеб. пособие. – М., 2004.

Башмаков М.И. Математика: учебник для 10 кл. – М., 2004.

Колмогоров А.Н. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2000.

Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 1). – М., 2003.

Колягин Ю.М. и др. Математика (Книга 2). – М., 2003.

Луканкин Г.Л., Луканкин А.Г. Математика. Ч. 1: учебное пособие для учреждений начального профессионального образования. – М., 2004.

Пехлецкий И.Д. Математика: учебник. – М., 2003.

Смирнова И.М. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2000.